

№ 21 Тақырыбы: Логарифмдік теңсіздіктерді шешу

Атыханов Талғат Атыханұлы

(асты сызылған курсив сөздердің орнында оқушы дәптерінде бос орын қалдырылады)

<p>Оң жақ бағандағы тапсырмаларды құрастырушы мұғалімдердің есіне:</p>	<p>I кезең. Мұғалім алғашқы 7-10 минутта: а) ұйымдастыру сәтін өткізеді; б) өткен тақырып бойынша берілген деңгейлік тапсырмаларды үйде аяқтап орындап келу дәрежесі тексеріледі; в) төмендегі «Көпір» тапсырмаларын тексереді (алдымен жеке тексеріп шығады, сосын фронталды тексереді).</p>
<p>«Көпір» (жеке жұмыс) тапсырмалары өткен тақырыптар бойынша жаңа сабақты меңгеруге негіз болатын қайталау тапсырмалары</p>	<p>Сұраққа жауап бер.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. <u>Өрнектің сол және оң жағы теңсіздік белгісі</u>мен байланысса онда бұндай <u>өрнекті теңсіздік</u> деп атаймыз. 2. <u>Теңсіздіктегі айнымалылардың орнына</u> қойғанда <u>теңсіздікті ақиқат теңсіздікке айналдыратындай айнымалының</u> әрбір мәні <u>теңсіздіктің шешімі</u> деп аталады. 3. <u>Теңсіздікті шешу дегеніміз</u> осы <u>теңсіздікті ақиқат пікірге айналдыратын барлық айнымалылардың мәндерін табу</u> немесе <u>олардың жоқ болатындығын</u> көрсету. 4. <u>Шешімдері беттесетін (бірдей болатын) теңсіздіктер мәндес теңсіздіктер</u> деп аталады, дербес жағдайда <u>шешімдері жоқ болатын екі теңсіздік мәндес</u>. 5. <u>Теңсіздіктерді шешкенде</u> әдетте берілген <u>теңсіздікті</u> оған <u>мәндес қарапайым теңсіздікпен</u> ауыстырады. 6. Логарифмдік функцияны және оның қасиеттерін тұжырымда. <p>Анықтама: $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$ (1) <u>формуласымен берілген функцияны логарифмдік функция</u> деп атайды.</p> <p>$y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$ <u>функциясының негізгі қасиеттері:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • <u>Анықталу облысы-барлық оң нақты сандар жиыны</u>, яғни $x \in (0; +\infty)$; • <u>Логарифмдік функцияның мәндер жиыны- барлық нақты сандар жиыны</u>, яғни $x \in (-\infty; +\infty)$; • <u>Негізі $a > 1$ болғанда, функция анықталу облысында – қатаң өспелі</u>, ал $0 < a < 1$ болғанда, <u>функция – қатаң кемімелі функция</u>. • $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$ <u>логарифмдік функциясы өзінің анықталу облысында үзіліссіз функция</u>.
<p>II кезең (топтық жұмыс) жаңа сабақты топтық жұмыс барысында оқушылардың өз бетімен меңгеруіне жағдай жасау: а) оқушылар төмендегі «Білу», «Түсіну», «Талдау», «Жинақтау» тәсілдеріне сәйкес тапсырмаларын өздері толтырады (20 минут); ә) жауаптарын мұғаліммен бірге талдайды (25 минут). Нәтижесі ауызша марапатталады.</p>	
<p>1-қадам (топтық жұмыс) - теория бойынша «Білу» критерийінің индикаторлары: (тақырып мазмұны бойынша кім?не? қандай? қалай?нені? қашан?не істеді сияқты сұрақтарға жауап беретін толық ақпарат іріктеліну керек)</p>	<p>Анықтама:</p> $\left. \begin{aligned} \log_a f(x) &> \log_a g(x) \\ \log_a f(x) &< \log_a g(x) \\ \log_a f(x) &\geq \log_a g(x) \\ \log_a f(x) &\leq \log_a g(x) \end{aligned} \right\} (1)$ <p>$a > 0, a \neq 1, f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$ түрінде берілген немесе осы түрге келетін <u>теңсіздікті логарифмдік теңсіздік</u> деп атайды.</p>
<p>2-қадам (топтық жұмыс) - теория бойынша «Түсіну» критерийінің индикаторлары: (неге? неліктен? себебі? не үшін? сұрақтары оқушының жоғарыда берген жауаптарына оларды тереңдету үшін қойылады)</p>	<p>Егер $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$ болса, онда $a > 1$ болғанда, $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ теңсіздігі $f(x) > g(x)$ теңсіздігімен мәндес болады, ал $0 < a < 1$ аралығында $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ теңсіздігі $f(x) < g(x)$ теңсіздігімен мәндес болады.</p> <p><u>Логарифмдік теңсіздіктерді шешуді логарифмнің негізіне</u> байланысты келесі екі жағдайдың бірі үшін қарастырамыз:</p> <p>$a \geq 1$ болғанда, $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ теңсіздігіне мәндес</p> $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x) \end{cases} (2) \text{ теңсіздіктер жүйесін шешеміз.}$ <p>$0 < a < 1$ болғанда, $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ теңсіздігіне мәндес</p>

	$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x) \end{cases} \quad (3) \text{ теңсіздіктер жүйесін шешеміз.}$
<p>3-қадам-(топтық жұмыс) теория бойынша «Талдау» критерийінің индикаторлары:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Салыстыр, 2. Айырмашылығы неде? 3. Ұқсастығы неде? 4. Тақырыптың басты идеясын жаз деген тапсырмалар болу керек. Немесе 1-3 тапсырмаларды Вени диаграммасы арқылы қамтуға болады. 	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 10px; width: 30%;"> <p style="text-align: center;">Логарифмдік теңсіздікті шеші үшін</p> <ul style="list-style-type: none"> • <u>Логарифм астындағы өрнектерді</u> салыстыру керек • <u>X айнымалысының мүмкін мәндер жиынын</u> анықтау керек </div> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 10px; width: 30%;"> <p style="text-align: center;">Ұқсастығы</p> <ul style="list-style-type: none"> • Теңсіздіктің <u>екі</u> жақ бөлігін <u>бірдей</u> негізге келтіру • Жаңа <u>айнымалы</u> енгізу • Негізі <u>бірге</u> тең емес және <u>нольден үлкен</u> • <u>Функцияның өсу және кему аралықтарын</u> ескеру </div> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 10px; width: 30%;"> <p style="text-align: center;">Көрсеткіштік теңсіздікті шеші үшін</p> <ul style="list-style-type: none"> • <u>дәреже көрсеткіштерін</u> салыстыру керек </div> </div> <p>а) Логарифмдік теңсіздік пен көрсеткіштік теңсіздіктерді шешудегі ортақ қасиет:</p> <ul style="list-style-type: none"> • <u>теңсіздіктің</u> екі жақ бөлігін бірдей <u>негізге</u> келтіру керек; • <u>жаңа айнымалы</u> енгізу қажет; • <u>негізі</u> бірге тең <u>емес</u> және <u>нольден үлкен</u> болу керек. • <u>Функцияның өсу және кему аралықтарын</u> ескеру <p>б) логарифмдік теңсіздікті шешудің ерекшелігі:</p> <ul style="list-style-type: none"> • <u>Логарифм астындағы өрнектерді</u> салыстыру керек • <u>X айнымалысының мүмкін мәндер жиынын</u> анықтау керек. <p>в) көрсеткіштік теңсіздікті шешудің ерекшелігі: дәреже көрсеткіштерін салыстыру керек.</p>
<p>4-қадам-(топтық жұмыс) теория бойынша «Жинақтау» критерийінің индикаторлары:</p> <p>Қорытынды шығар, анықтама бер, мазмұнды жүйеле, кестені, тірек сызбаны немесе сөзжұмбақты толтыр, немесе өзін құрастыр тағы с.с. басқа түрдегі тапсырмалар оқушының жоғарыдағы «тақырыптың басты идеясына» жазған жауабына қойылады</p>	<p>1) Тақырыптың жоғарыда берілген басты идеясы бойынша құрылған тірек-сызбаны толтыр</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; text-align: center;"> <p>Тенсіздіктер</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">Логарифмдік</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">Көрсеткішті</div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ $\log_a f(x) \geq \log_a g(x)$ $\log_a f(x) \leq \log_a g(x)$ </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$ $a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$ </div> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> $f(x) > 0, g(x) > 0$ </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> $a \geq 1$ </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> $0 < a < 1$ </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> $f(x) > g(x)$ $f(x) < g(x)$ $f(x) \geq g(x)$ $f(x) \leq g(x)$ </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> $f(x) < g(x)$ $f(x) > g(x)$ $f(x) \leq g(x)$ $f(x) \geq g(x)$ </div> </div> </div>
<p>Оқулықпен жұмыс (5 минут): төмендегі «Қолдану» және оқушының тақырып мазмұнына «Баға беруі» тәсілдеріне сәйкес, яғни рефлексия жасауға, эссе жазуға арналған, практика жүзінде бекіту тапсырмалары орындалады. Нәтижесі ауызша марапатталады.</p>	

<p>5-қадам - (топтық жұмыс) практикада бекіту. Практика жүзінде «Қолдану» критерийіне сәйкес оқулықпен жұмыс жүргізу барысында тек қарапайым тапсырмалармен бекіту жүргізіледі. Дайын формулалар арқылы есептер шығару орындалады</p>	<p>1-Мысал: $\log_5(3x + 5) > \log_5(15 - 2x)$ теңсіздігін шешейік. Шешуі. Берілген логарифмдік теңсіздіктің негізі $a = 5 > 1$ болғандықтан, (2) формулаға сәйкес берілген теңсіздікке мәндес мына теңсіздіктер жүйесін аламыз:</p> $\begin{cases} 3x + 5 > 0 \\ 15 - 2x > 0 \\ 3x + 5 > 15 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{5}{3} \\ x < 7,5 \\ x > 2 \end{cases} \quad \text{Жауабы. (2; 7,5)}$ <p>2- Мысал. $\log_{0,5} x \geq -6 + \log^2_{0,5} x$ теңсіздікті шешіңдер: Шешуі: $\log^2_{0,5} x - \log_{0,5} x - 6 \leq 0$ теңсіздікті шешу үшін жаңа белгісіз енгіземіз $\log_{0,5} x = t$, сонда $t^2 - t - 6 \leq 0$. Соңғы теңсіздікті шешу үшін интервалдар әдісін қолданып $t \in [-2; 3]$ екенін аламыз. Сонда $\log_{0,5} x \in [-2; 3]$, яғни $-2 \leq \log_{0,5} x \leq 3$ немесе $\log_{0,5} 0,5^{-2} \leq \log_{0,5} x \leq \log_{0,5} 0,5^3$ шығады. Логарифмнің негізі $a = 0,5 < 1$ екенін ескеріп, қос теңсіздіктен $\frac{1}{8} \leq x \leq 4$ теңсіздігіне көшеміз. x айнымалысының мүмкін мәндер жиыны барлық оң сандар жиыны. Сондықтан берілген логарифмдік теңсіздіктің шешімдер жиыны $[\frac{1}{8}; 4]$ кесіндісі болады. Жауабы. $[\frac{1}{8}; 4]$</p>
<p>6-қадам (топтық жұмыс): «Баға беру» (Сен қалай ойлайсың? Не істер едің? деген тапсырмалар оқушыға жоғарыда алған білімін (теория бойынша) және біліктілігін (практикасы бойынша) өмірдегі жағдаяттарды шешуге бағытталып қойылады</p>	<p>Берілген теңсіздіктегі логарифмдік функциялардың анықталу облысын табу міндеті ме? Жауабы: <u>Жоқ.</u> Логарифмдік теңсіздіктерді шешкенде, логарифмдік функцияның анықталу облысы <u>оң</u> сан екенін ескеріп, x айнымалысының мүмкін мәндер жиынын анықтап алып, содан кейін функцияның өсу, кему аралықтарын ескере отырып теңсіздікті шешіп, анықталған аралықтың мүмкін мәндер жиынына жататын аралықты жауап ретінде алмыз.</p>
<p>III кезең (кері байланыс – бағалау кезеңі): Жеке жұмыс. Жоғарыда меңгерген мазмұнды үш деңгейге іріктеп (әр деңгейдің білімділік, біліктілік, яғни құзыреттілік деңгейін анықтайтын тапсырмалар) оларды біртіндеп орындату арқылы балл жинау барысында оқушының құзыреттілік деңгейін анықтап, әділ бағалау жүзеге асырылады. Бұл тапсырмаларды оқушылар сабақтың соңына дейін қалған 25 минуттың 22 минутында орындайды + 3 минут қортынды жасалады. Қалған тапсырмаларды үйде аяқтап келеді. Қортынды балл саны дәстүрлі бағаға айналдырылып, келесі сабақтың басында сынып журналына қойылады, мониторингке тіркеледі.</p>	
<p>I деңгей (5 балл)</p>	
<p>1-қадам – (жеке жұмыс) теория бойынша «Білу» критерийінің индикаторларына сәйкес (тақырып мазмұны бойынша кім? не? қандай? қалай? нені? қашан? не істеді сияқты сұрақтарға жауап беретін толық ақпараттар іріктелініп II кезеңдегіге қарағанда керісінше қойылады)</p>	<p>Анықтама: $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ $a > 0, a \neq 1, f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$ түрінде берілген немесе осы түрге келетін теңсіздікті логарифмдік теңсіздік деп атайды. Егер $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$ болса, онда $a > 1$ болғанда, $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ теңсіздігі $f(x) > g(x)$ теңсіздігімен мәндес болады, ал $0 < a < 1$ аралығында $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ теңсіздігі $f(x) < g(x)$ теңсіздігімен мәндес болады.</p>
<p>Практикасы: «ҚОЛДАНУ» (II кезеңдегіге қарапайым тапсырмалар үлгісіндегі тапсырмалар орындалады)</p>	<p>№101. $\log_{1,2}(x-2) + \log_{1,2}(x+2) < \log_{1,2} 5$ № 102. $\log_4(x+7) > \log_2(x+1)$ №103. $5^{\log_2 \frac{8-12x}{x-6}} > 125$</p>
<p style="text-align: center;">I-аралық нәтиже: Бірінші деңгейде қалыптасқан құзіреттілік (білім, біліктілік) деңгейінің сапалық өлшемі (бірінші аралық өлшемі): – «дұрыс», «толық» деген білім сапасының түрлерімен сипатталады (Ю.К.Бабанский). Оқушының бұл алғашқы қадам нәтижесінің сандық өлшемі – бес балл = «сынақтан өтті» = «қанағаттандырарлық» білім деңгейінің өлшемі = «3» журналға қойылады, егер келесі деңгей тапсырмаларын меңгере алмаса.</p>	
<p>II деңгей (5 балл + 4 балл = 9 балл)</p>	
<p>1-қадам (жеке жұмыс) - теория бойынша «Түсіну» критерийінің индикаторларына (неге? неліктен? себебі? не үшін?) сәйкес сұрақтар оқушының жоғарыда берген жауаптарына оларды тереңдету үшін қойылады.</p>	<p>1. Логарифмдік теңсіздікті шешу дегеніміз не? <u>Логарифмдік теңсіздікті шешу дегеніміз – оның барлық шешімін табу немесе шешімі болмайтынын дәлелдеу</u></p> <p>2. Неге көп жағдайда логарифмдік теңсіздіктерді шешу теңсіздіктер жүйесін қарастыруға әкеледі? <u>x айнымалысының мүмкін мәндер жиыны барлық оң сандар жиыны болатынын ескергендіктен.</u></p>
<p>2-қадам (жеке жұмыс) -</p>	<p>Логарифмдік теңсіздікті шешу үшін басты назар неге аударылады?</p>

<p>теория бойынша «Талдау» критерийінің индикаторларына сәйкес (1.Салыстыр, 2. Айырмашылығы неде? 3. Ұқсастығы неде? 4.Тақырыптың басты идеясын жаз) деген тапсырмалар болу керек. Немесе 1-3 тапсырмаларды Венн диаграммасы арқылы қамтуға болады.</p>	<p><u>x айнымалысының мүмкін мәндер жиыны барлық оң сандар жиыны болатынын және логарифмдік функцияның өсу, кему аралықтарын ескеру керек.</u></p> <p>«Қатені тап !» $\log_8(5x-10) < \log_8(14-x)$, $5x-10 < 14-x$, $6x < 24$, $x < 4$. Жауабы: $x \in (-\infty; 4)$.</p> <p>Функцияның анықталу облысын ескеру керек, яғни $\begin{cases} 5x - 10 > 0 \\ 14 - x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 14 \end{cases}$ сонда жауабы: $x \in (2; 4)$</p>
<p>3-қадам (жеке жұмыс): Практика жүзінде «ҚОЛДАНУ» критерийіне сәйкес (II кезеңдегіге 5-қадам қарапайым тапсырмалар үлгісіндегі тапсырмалардың өзгертілген жағдайдағы нұсқасы орындалады)</p>	<p>№104. $\log_x(\log_9(3^x - 9)) < 1$ №105. $\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1$ №106. $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{1/3} x < 6$</p>
<p align="center">2-аралық нәтиже:</p> <p>Бірінші деңгейде қалыптасқан құзіреттілік (білім, біліктілік) деңгейінің саналық өлшемі (бірінші аралық өлшемі): – «дұрыс», «толық» деген білім сапасының түрлерімен сипатталады (Ю.К.Бабанский). Оқушының бұл алғашқы қадам нәтижесінің сандық өлшемі – бес балл = «сынақтан өтті» = «қанағаттандырарлық» білім деңгейінің өлшемі = «3» журналға қойылады, егер келесі деңгей тапсырмаларын меңгере алмаса.</p>	

<p align="center">III деңгей (9 балл + 3 балл = 12 балл)</p>	
<p>1-қадам (жеке жұмыс) - теория бойынша «Жинақтау» критерийінің қорытынды шығаруға бағытталған индикаторлары: Қорытынды шығар, анықтама бер, мазмұнды жүйеле, кестені, тірек сызбаны, сөзжұмбақты толтыр немесе өзің құрастыр тағы с.с. басқа түрдегі тапсырмалар оқушының жоғарыдағы «тақырыптың басты идеясына» жазған жауабына қойылады.</p> <p>II-кезең, 4-қадамда «жинақтауға» берілген тапсырма басқа формада беріліп, баланың білім деңгейі бағаланады.</p>	<p>Тест тапсырмалары</p> <p>1. $\log_{\frac{1}{6}}\left(8 - \frac{4}{5}x\right) > -2$ A) $(-\infty; -35) \cup (10; +\infty)$ B) $(-35; 10)$ C) $(10; +\infty)$ D) $(-\infty; -10) \cup (35; +\infty)$</p> <p>2. $\log_2(x+2) \geq \log_2 3$ A) $(1; +\infty)$ B) $[1; +\infty)$ C) $(-\infty; 1)$ D) $(-2; 1]$</p> <p>3. $\log_{\frac{1}{3}} 4x < -1$ A) $(0; \frac{3}{4})$ B) $(-\infty; 0)$ C) $(\frac{3}{4}; +\infty)$ D) $(-\infty; \frac{3}{4})$</p> <p>4. $\log_7(x+5) \geq \log_7(2x+3)$ A) $[-1.5; 2)$ B) $(-1.5; 2]$ C) $(-\infty; -1.5)$ D) $(2; +\infty)$</p>
<p>2-қадам (жеке жұмыс): «Баға беру» (Сен қалай ойлайсың? Не істер едің? деген тапсырмалар оқушыға жоғарыда алған білімін (теория бойынша) және біліктілігін (практикасы бойынша) өмірдегі жағдаяттарды шешуге қолдана алу дәрежесі бағаланады.</p>	<p>№ 107. 1) $\log_{0,1}(x-2) - \lg x > \log_{0,1} 3$ 2) $\log_{0,5} x - \log_2(x-3) < \log_{0,5} 4$</p>
<p align="center">3-нәтиже:</p> <p>Үшінші деңгейдің нәтижесі (түбегейлі көзделген нәтиже): алғашқы екі деңгейде жинаған 9 баллға + 3 балл = 12 балл = «5» журналға қойылады. Оқушының білім сапасы білім стандарты көлемінде «дұрыс», «толық», «әрекеттілік» пен «тереңділік»-ке «күйелілік» пен «саналылық» қосылып, барлығының жиынтығы «берік» білім болып саналады (Ю.К. Бабанский).</p>	