

№ 18 Тақырыбы: *Логарифм. Ондық және натурал логарифм логарифмдік өрнектерді түрлендіру, олардың мәнін есептеу*
Атыханов Талғат Атыханұлы
 (асты сызылған курсив сөздердің орнында оқушы дәптерінде бос орын қалдырылады)

<p>Оң жақ бағандағы тапсырмаларды құрастырушы мұғалімдердің есіне:</p>	<p>I кезең. Мұғалім алғашқы 7-10 минутта: а) ұйымдастыру сәтін өткізеді; б) өткен тақырып бойынша берілген деңгейлік тапсырмаларды үйде аяқтап орындап келу дәрежесі тексеріледі; в) төмендегі «Көпір» тапсырмаларын тексереді (алдымен жеке тексеріп шығады, сосын фронталды тексереді).</p>
<p>«Көпір» (жеке жұмыс) тапсырмалары өткен тақырыптар бойынша жаңа сабақты меңгеруге негіз болатын қайталау тапсырмалары</p>	<p>Сұраққа жауап бер. 1. Дәреженің негізі теріс сан болуы мүмкін бе? $a < 0$ болса, онда нақты көрсеткішті дәреже бір мәнді анықталмағандықтан, <u>дәреженің негізі теріс сан бола алмайды.</u> 2. Теңдеуді шешу дегеніміз не? Теңдеуді <u>шешу</u> дегеніміз - <u>тең функцияларды қанағаттандыратын аргументтің барлық мәндерін</u> іздестіру деген сөз. <u>Функциялардың анықталу аймақтарының ортақ бөлігінде теңдеудің шешімдері</u> болады. 3. Көрсеткіштік теңдеуге анықтама бер. Анықтама: $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$ (1) түрінде берілген немесе осы түрге келетін <u>теңдеуді көрсеткіштік теңдеу</u> деп атайды. Кез келген <u>көрсеткіштік теңдеуді</u> тепе-тең түрлендіру арқылы $a^x = b$ (2) <u>теңдеуіне</u> келтіреміз $a > 0$, $a \neq 1$, ал b - кез келген сан. (2) түрінде берілген теңдеуді <u>қарапайым көрсеткіштік теңдеу</u> деп атайды.</p>
<p>II кезең (топтық жұмыс) жаңа сабақты топтық жұмыс барысында оқушылардың өз бетімен меңгеруіне жағдай жасау: а) оқушылар төмендегі «Білу», «Түсіну», «Талдау», «Жинақтау» тәсілдеріне сәйкес тапсырмаларын өздері толтырады (20 минут); ә) жауаптарын мұғаліммен бірге талдайды (25 минут). Нәтижесі ауызша марапатталады.</p>	
<p>1-қадам (топтық жұмыс) - теория бойынша «Білу» критерийінің индикаторлары: (тақырып мазмұны бойынша кім? не? қандай? қалай? нені? қашан? не істеді сияқты сұрақтарға жауап беретін толық ақпарат іріктеліну керек)</p>	<p><u>Көрсеткіштік теңдеулерді</u> шешу бойынша жинақтаған білімді қолданып $4^x = 16$ және $5^x = 125$ теңдеулерінің сәйкесінше түбірлері 2-ге және 3-ке тең екенін бірден айтуға болады, ал $4^x = 24$ <u>көрсеткіштік теңдеуінің түбірі көрсеткіштік теңдеулерді</u> шешудің белгілі әдістері арқылы табылмайды. Бұл <u>теңдеуді графикалық тәсілді</u> қолданып шешеміз ($y = 4^x$ және $y = 24$ графиктерін сызамыз килысу нүктесі шешімі болады), оның бір ғана түбірі бар екенін анықтауға болады. $a^x = b$, $a > 0$, $a \neq 1$ теңдеуін қарастырайық. Бұл теңдеудің түбірі $y = a^x$ <u>функциясы</u> графигі мен $y = b$ <u>түзуінің</u> қилысу <u>нүктелерінің абсциссасына</u> тең (1, 2-суреттер). Осы суреттерден егер $b > 0$ болса, онда $y = a^x$ <u>функциясы графигі</u> мен $y = b$ түзуі бір нүктеде қилысатынын, ал егер $b \leq 0$ болса, онда $y = a^x$ <u>функциясы графигі</u> мен $y = b$ түзуі қилыспайтынын көреміз. Олай болса, $b > 0$ болған жағдайда $a^x = b$ теңдеуінің жалғыз түбірі бар ($x = c$), ал $b \leq 0$ болса, онда бұл теңдеудің шешімі жоқ. $a^x = b$ теңдеуінің, мұндағы $b \neq a^n$ <u>көрсеткіштік теңдеуін</u> шешу тәсілін беру үшін жаңа ұғым – <u>логарифм</u> ұғымы қарастырылады. $a^x = b$ теңдеуіне, $a > 0$ және $a \neq 1$, қайта оралайық, $b > 0$ болғанда жалғыз түбірі болады. Сол <u>түбірді</u> негізі a болатын b санының логарифмі деп атайды және былай белгілейді $\log_a b$, яғни</p> $a^{\log_a b} = b$ <p>$4^x = 24$ <u>теңдеуін ларогифмді</u> пайдаланып <u>теңдеудің түбірін</u> табайық, сонда $4^x = 4^{\log_4 24}$ бұдан, <u>теңдеуінің түбірі</u> $x = \log_4 24$ болады.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div data-bbox="526 1456 813 1702"> <p>1-сурет</p> </div> <div data-bbox="957 1456 1244 1702"> <p>2-сурет</p> </div> </div>
<p>2-қадам (топтық жұмыс) - теория бойынша «Түсіну» критерийінің индикаторлары: (неге? неліктен? себебі? не үшін? сұрақтары оқушының жоғарыда берген жауаптарына оларды тереңдету үшін қойылады)</p>	<p>Анықтама: b санының негізі a болатын N санының <u>логарифмі</u> деп N санына тең болатын <u>негіздің дәрежесі көрсеткішін</u> айтымыз. Анықтама бойынша: $\log_a N = b$, $a > 0$, $a \neq 1$, $N > 0$, яғни $a^b = N > 0$. $\log_4 64 = 4 \Rightarrow 4^4 = 64$; $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{243} = 5 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$. $\log_a N = b$ формуланы $a^b = N$ теңдігіне қойып, келесі тепе – теңдікті алуға болады: $a^{\log_a N} = N$ бұл негізгі <u>логарифмдік</u> тепе – теңдікті деп аталады.</p>

<p>3-қадам-(топтық жұмыс) теория бойынша «Талдау» критерийінің индикаторлары: 1.Салыстыр, 2. Айырмашылығы неде? 3. Ұқсастығы неде? 4.Тақырыптың басты идеясын жаз деген тапсырмалар болу керек. Немесе 1-3 тапсырмаларды Венн диаграммасы арқылы қамтуға болады.</p>	<p>Логарифмнің негізгі қасиеттері:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. бір <i>санының логарифмі</i> нөлге тең, яғни $\log_a 1 = 0$; 2. <i>негізі</i> a болатын a <i>санының логарифмі</i> <i>бір</i>ге тең, яғни $\log_a a = 1$; 3. <i>көбейтінді</i>нің <i>логарифмі</i> <i>көбейткіш</i>тердің <i>логарифмдерінің қосындысына</i> тең, яғни $\log_a (N_1 \cdot N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2$; 4. <i>бөлшектің логарифмі</i> <i>алымының логарифмі</i> мен <i>бөлімінің логарифмінің айырымына</i> тең, яғни $\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2$; 5. <i>дәреженің логарифмі</i> <i>дәреженің көрсеткішін негіздің логарифміне көбейткенге</i> тең, яғни $\log_a N^p = p \log_a N$ 6. Егер $N > 0$ болса, онда $\log_{a^q} N^p = \frac{p}{q} \log_a N$ теңдігі орындалады 7. <i>түбірдің логарифмі</i> <i>түбір</i> астындағы <i>өрнектің логарифмін түбір көрсеткішіне бөлгенге</i> тең, яғни $\log_a \sqrt[m]{N} = \frac{\log_a N}{m}, N > 0$; 8. <i>жаңа негізге көшу</i>: $\log_a N = \frac{\log_c N}{\log_c a}$.
<p>4-қадам-(топтық жұмыс) теория бойынша «Жинақтау» критерийінің индикаторлары: Қорытынды шығар, анықтама бер, мазмұнды жүйеле, кестені, тірек сызбаны немесе сөзжұмбақты толтыр, немесе өзің құрастыр тағы с.с. басқа түрдегі тапсырмалар оқушының жоғарыдағы «тақырыптың басты идеясына» жазған жауабына қойылады</p>	<p>Егер <i>логарифмдердің негіздері</i> бердей болса, онда <i>логарифм</i> астындағы <i>өрнектер тең</i> болады. Яғни $\log_a b = \log_a c$ теңдеуінен $b = c$ теңдігіне ауысуды <i>потенциалдау</i> деп атайды. <i>Потенцирлеу</i> термині немістің potenzieren сөзінен қазақша аударғанда <i>дәрежеге шығару</i> деген мағынаны білдіреді. <i>Потенцирлеу</i> термині мынадай <i>түрлендіруді</i> қолдану барысында қолданылады:</p> $\log_a b = \log_a c \Rightarrow a^{\log_a b} = a^{\log_a c} \Rightarrow b = c$ <p><i>жаңа негізге көшу формуласынан</i> $\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$</p>
<p>Оқулықпен жұмыс (5 минут): төмендегі «Қолдану» және оқушының тақырып мазмұнына «Баға беруі» тәсілдеріне сәйкес, яғни рефлексия жасауға, эссе жазуға арналған, практика жүзінде бекіту тапсырмалары орындалады. Нәтижесі ауызша марапатталады.</p>	
<p>5-қадам - (топтық жұмыс) практикада бекіту. Практика жүзінде «Қолдану» критерийіне сәйкес оқулықпен жұмыс жүргізу барысында тек қарапайым тапсырмалармен бекіту жүргізіледі. Дайын формулалар арқылы есептер шығару орындалады</p>	<p>Мысал: $1. \lg 1000 \sqrt[3]{ab^2c^5} = \lg 1000 + \lg^3 \sqrt[3]{a} + \lg^3 \sqrt[3]{b^2} + \lg^3 \sqrt[3]{c^5} = \lg 10^3 + \lg a^{\frac{1}{3}} + \lg b^{\frac{2}{3}} + \lg c^{\frac{5}{3}} = 3 + \frac{1}{3} \lg a + \frac{2}{3} \lg b + \frac{5}{3} \lg c$.</p> <p>2. Есептендер $\log_6 5$ мұндағы $\log_3 2 = x, \lg 2 = y$ Шешуі: $\log_6 5$ өрнегін 2 негізі логарифм түрінде жазамыз. Сонда, $\log_6 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 6} = \frac{\log_2 5}{\log_2 2 \cdot 3} = \frac{\log_2 5 - \log_2 2}{\log_2 2 + \log_2 3} = \frac{\log_2 5 - 1}{1 + \log_2 3}$</p> <p>Есептің шарты бойынша: $\log_3 2 = x \Leftrightarrow \log_2 3 = \frac{1}{x}, \lg 2 = y \Leftrightarrow \log_2 10 = \frac{1}{y}$ бұдан яғни, $\log_6 5 = \frac{\frac{1}{y} - 1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\frac{1-y}{y}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{x(1-y)}{y(x+1)}$ Жауабы. $\frac{x(1-y)}{y(x+1)}$</p>
<p>6-қадам (топтық жұмыс): «Баға беру» (Сен қалай ойлайсың? Не істер едің? деген тапсырмалар оқушыға жоғарыда алған білімін (теория бойынша) және біліктілігін (практикасы бойынша) өмірдегі жағдаяттарды шешуге бағытталып қойылады</p>	<p>$\log_{10} x = \lg x$ <i>ондық логарифм, негізі он</i> болатын <i>логарифм</i>. $\log_e x = \ln x$ <i>натурал логарифм, негізі e</i> саны болатын <i>логарифм</i>. $e \approx 2,717$</p> <p><i>Логарифмнің негізгі қасиеттері логарифмдері бар алгебралық өрнектерді</i> тепе-тең <i>түрлендіргенде</i> қолданылады. <i>Алгебралық өрнек көбейтінді, бөлшек, дәрежелеу, және түбір</i> табу амалдары арқылы берілген <i>оң</i> сандардың <i>өрнектері</i> болса, онда оларды <i>логарифмнің негізгі қасиеттерін</i> қолданып <i>логарифмдеуге</i> болады. Берілген <i>логарифмі</i> бойынша <i>өрнектің өзін табу потенциалдау</i> деп аталады. $\log_a t = \log_a s \Leftrightarrow t = s, a > 0, a \neq 1, t > 0, s > 0$.</p>
<p>III кезең (кері байланыс – бағалау кезеңі): Жеке жұмыс. Жоғарыда меңгерген мазмұнды үш деңгейге іріктеп (әр деңгейдің білімділік, біліктілік, яғни құзыреттілік деңгейін анықтайтын тапсырмалар) оларды біртіндеп орындату арқылы балл жинату барысында оқушының құзіреттілік деңгейін анықтап, әділ бағалау жүзеге асырылады. Бұл тапсырмаларды оқушылар сабақтың соңына дейін қалған 25 минуттың 22 минутында орындайды + 3 минут қортынды жасалады. Қалған тапсырмаларлы үйде аяқтап келеді. Қортынды балл саны дәстүрлі бағаға айналдырылып, келесі сабақтың басында сынып журналына қойылады, мониторингке тіркеледі</p>	

I деңгей (5 балл)	
<p>1-қадам – (жеке жұмыс) теория бойынша «Білу» критерийінің индикаторларына сәйкес (тақырып мазмұны бойынша кім?не?қандай? қалай? нені? қашан?не істеді сияқты сұрақтарға жауап беретін толық ақпараттар іріктелініп II кезеңдегіге қарағанда керісінше қойылады)</p>	<p>$a^x = b, a > 0, a \neq 1$ теңдеуінің $b \leq 0$ болған жағдайда $a^x = b$ теңдеуінің, ал $b > 0$ болса, онда бұл теңдеудің жалғыз түбірі бар. Сол түбірді негізі а болатын b санының логарифмі деп атайды.</p> <p>Анықтама: b санының a негізі бойынша логарифмі деп b саны шығу үшін негіз а шығарылатын дәреже көрсеткішін айтымыз.</p>
<p>Практикасы: «ҚОЛДАНУ» (II кезеңдегіге қарапайым тапсырмалар үлгісіндегі тапсырмалар орындалады)</p>	<p>№79 $\left(3^{\frac{\log_3 5}{\log_5 3}} - 5^{\frac{1}{\log_5 3}} + 7^{\log_7 49} \right)^{\frac{1}{2}}$ № 80 $2^{\frac{1}{2 \log_5 2}} \cdot 5^{\log_5^2 2} - \sqrt{5} \cdot 2^{\log_5 2} - \left(\frac{1}{3} \right)^{\log_3 25}$</p> <p>№ 81 $(\log_3 2 + \log_2 81 + 4)(\log_3 2 - 2 \log_{18} 2) \log_2 3 - \log_3 2$</p>
1-аралық нәтиже:	
<p>Бірінші деңгейде қалыптасқан күзiреттiлiк (бiлiм, бiлiктiлiк) деңгейiнiң сапалық өлшемі (бiрiншi аралық өлшемі): – «дұрыс», «толық» деген бiлiм сапасының түрлерiмен сипатталады (Ю.К.Бабанский). Оқушының бұл алғашқы қадам нәтижесiнiң сандық өлшемі – бес балл = «сынақтан өттi» = «қанағаттандырарлық» бiлiм деңгейiнiң өлшемі = «3» журналға қойылады, егер келесi деңгей тапсырмаларын меңгере алмаса.</p>	
II деңгей (5 балл + 4 балл = 9 балл)	
<p>1-қадам (жеке жұмыс) - теория бойынша «Түсiну» критерийiнiң индикаторларына (неге? нелiктен? себебi? не үшiн?) сәйкес сұрақтар оқушының жоғарыда берген жауаптарына оларды тереңдету үшiн қойылады.</p>	<p>Анықтама: b санының негізі а болатын N санының логарифмі деп N санына тең болатын негіздің дәреже көрсеткішін айтымыз.</p> <p>Анықтама бойынша: $\log_a N = b, a > 0, a \neq 1, N > 0$, яғни $a^b = N > 0$.</p> <p>$\log_4 64 = 4 \Rightarrow 4^3 = 64; \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{243} = 5 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$.</p> <p>$\log_a N = b$ формуланы $a^b = N$ теңдiгiне қойып, келесi тепе – теңдiктi алуға болады: $a^{\log_a N} = N$ бұл негізгi логарифмдiк тепе – теңдiктi деп аталады.</p>
<p>2-қадам (жеке жұмыс) - теория бойынша «Талдау» критерийiнiң индикаторларына сәйкес (1.Салыстыр, 2. Айырмашылығы неде? 3. Ұқсастығы неде? 4.Тақырыптың басты идеясын жаз) деген тапсырмалар болу керек. Немесе 1-3 тапсырмаларды Венн диаграммасы арқылы қамтуға болады.</p>	<p>Логарифмнің негізгі қасиеттері:</p> <ol style="list-style-type: none"> $\log_a 1 = 0$ - бiр санының логарифмі нөлге тең. $\log_{13} 1 = \log_{27} 1 = 0$ $\log_a a = 1$- негізі а болатын а санының логарифмі бiрге тең. $\log_{15} 15 = \log_{37} 37 = 1$ $\log_a (N_1 \cdot N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2$- көбейтiндiнiң логарифмі көбейткiштердiң логарифмдерiнiң қосындысына тең. $\log_4 48 = \log_4 16 \cdot 3 = \log_4 16 + \log_4 3 = 2 + \log_4 3$ $\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2$- бөлшектiң логарифмі алымының логарифмі мен бөлiмiнiң логарифмiнiң айырымына тең. $\log_3 \frac{9}{31} = \log_3 9 - \log_3 31 = 2 - \log_3 31$ $\log_a N^p = p \log_a N$- дәреженiң логарифмі дәреженiң көрсеткiшiн негiздiң логарифмiне көбейткенге тең. Егер $N > 0$ болса, онда $\log_{a^q} N^p = \frac{p}{q} \log_a N$ теңдiгi орындалады $\log_a \sqrt[m]{N} = \frac{\log_a N}{m}, N > 0$-түбiрдiң логарифмі түбiр астындағы өрнектiң логарифмiн түбiр көрсеткiшiне бөлгенге тең $\log_a N = \frac{\log_c N}{\log_c a}$-жаңа негiзге көшу формуласы.
<p>3-қадам (жеке жұмыс): Практика жүзінде «ҚОЛДАНУ» критерийiне сәйкес (II кезеңдегіге 5-қадам қарапайым тапсырмалар үлгісіндегі тапсырмалардың өзгертілген жағдайдағы нұсқасы орындалады)</p>	<p>№ 82 $3^{2 + \frac{\log_3 4}{\log_4 3}} - 9 \cdot 4^{\frac{1}{\log_4 3}} + 4^{1 + \log_4 25}$</p> <p>№ 83 $\frac{\left(3^{\log_{\sqrt{3}} 2} - 4^{\log_{\sqrt{3}} 2} \right)^2 - 1}{2}$ № 84 $7^{\frac{2}{\log_2 7}} \cdot 4^{\log_4^2 6} - 4 \cdot 6^{\log_4 6} + \left(\sqrt[3]{5} \right)^{\log_3 27}$</p>

2-аралық нәтиже:

Бірінші деңгейде қалыптасқан күзiреттiлiк (бiлiм, бiлiктiлiк) деңгейiнiң **сапалық** өлшемі (**бiрiншi аралық өлшемі**): – «дұрыс», «толық» деген **бiлiм сапасының түрлерiмен** сипатталады (Ю.К.Бабанский). Оқушының бұл алғашқы қадам нәтижесiнiң **сандық өлшемі** – бес балл = «сынақтан өттi» = «қанағаттандырарлық» бiлiм деңгейiнiң өлшемі = «3» журналға қойылады, егер келесi деңгей тапсырмаларын меңгере алмаса.

III деңгей (9 балл + 3 балл = 12 балл)	
<p>1-қадам (жеке жұмыс) - теория бойынша «Жинақтау» критерийiнiң қорытынды шығаруға бағытталған индикаторлары: Қорытынды шығар, анықтама бер, мазмұнды жүйеле, кестенi, тiрек сызбаны, сөзжұмбақты толтыр немесе өзiң құрастыр тағы с.с. басқа түрдегi тапсырмалар оқушының жоғарыдағы «тақырыптың басты идеясына» жазған жауабына қойылады.</p> <p>II-кезең, 4-қадамда «жинақтауға» берiлген тапсырма басқа формада берiлiп, баланың бiлiм деңгейi бағаланады.</p>	<p>Егер логарифмдердiң негiздерi бердей болса, онда логарифм астындағы өрнектер тең болады. Яғни $\log_a b = \log_a c$ теңдеуiнен $b = c$ теңдiгiне ауысуды потенциалдау деп атайды. Потенцирлеу терминi немістің potenzieren сөзінен қазақша аударғанда дәрежеге шығару деген мағынаны бiлдiредi. Потенцирлеу терминi мынадай түрлендiрудi қолдану барысында қолданылады:</p> <p>Берiлген логарифмi бойынша өрнектiң өзiн табу потенциалдау деп аталады.</p> $\log_a b = \log_a c \Rightarrow a^{\log_a b} = a^{\log_a c} \Rightarrow \underline{b = c}, \quad a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$
<p>2-қадам (жеке жұмыс): «Баға беру» (Сен қалай ойлайсың? Не iстер едiң? деген тапсырмалар оқушыға жоғарыда алған бiлiмiн (теория бойынша) және бiлiктiлiгiн (практикасы бойынша) өмiрдегi жағдаяттарды шешуге қолдана алу дәрежесi бағаланады.</p>	<p>№ 85 $3^{\frac{1}{2\log_7 3}} \cdot 3^{\log_3^2 8} - \sqrt{7} \cdot 8^{\log_3 8} + (\sqrt{3})^{\log_3 25}$</p> <p>№ 86 $\frac{\log_7^2 14 + (\log_7 14)(\log_7 2) - 2\log_7^2 2}{\log_7 14 + 2\log_7 2}$</p>
<p>3-нәтиже:</p>	
<p>Үшiншi деңгейдiң нәтижесi (түбегейлi көзделген нәтиже): алғашқы екi деңгейде жинаған 9 баллға + 3 балл =12 балл = «5» журналға қойылады. Оқушының бiлiм сапасы бiлiм стандарты көлемiнде «дұрыс», «толық», «әркеттiлiк» пен «тереңдiлiк»-ке «жүйелiлiк» пен «саналылық» қосылып, барлығының жиынтығы «берiк» бiлiм болып саналады (Ю.К. Бабанский).</p>	