

№ 11 Тақырыбы: *Функцияның нүктедегі және аралықтағы үзіліссіздігі*
Атыханов Талғат Атыханұлы
(асты сызылған курсив сөздердің орнында оқушы дәптерінде бос орын қалдырылады)

<p>Оң жақ бағандағы тапсырмаларды құрастырушы мұғалімдердің есіне:</p>	<p>I кезең. Мұғалім алғашқы 7-10 минутта: а) ұйымдастыру сәтін өткізеді; б) өткен тақырып бойынша берілген деңгейлік тапсырмаларды үйде аяқтап орындап келу дәрежесі тексеріледі; в) төмендегі «Көпір» тапсырмаларын тексереді (алдымен жеке тексеріп шығады, сосын фронталды тексереді).</p>
<p>«Көпір» (жеке жұмыс) тапсырмалары өткен тақырыптар бойынша жаңа сабақты меңгеруге негіз болатын қайталау тапсырмалары</p>	<p>Сұрақтаға жауап бер.</p> <ol style="list-style-type: none"> Функцияға анықтама бер. <i>X жиынындағы</i> x-тің әрбір мәніне <i>Y жиынының нақты</i> бір y мәнін сәйкес қоятын <u>ереже</u> немесе <u>заңдылық функция</u> деп аталады. Функцияның нүктедегі шегіне анықтама бер Анықтама: Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $x = a$ нүктесінің аймағы табылып, осы аймақтағы әрбір $x (x \neq a)$ үшін $f(x) - A < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда A санын $f(x)$ функциясының $x = a$ нүктесіндегі <u>шегі</u> деп атайды және былай жазады: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ Шектелген функцияға анықтама бер Анықтама: <u>Анықталу облысының</u> кез келген нүктесіндегі $f(x)$ функциясының мәндерінің абсолют шамасы белгілі бір $b > 0$ санынан кіші немесе оған тең болса, яғни $f(x) \leq b, x \in X$, онда ол осы жиында <u>шектелген функция</u> деп аталады. Функцияның шектік мәніне анықтама бер Анықтама: x аргументі ұмтылатын a мәні $y = f(x)$ функциясының анықталу облысының ішінде жатса, онда функцияның сол нүктедегі мәні оның <u>шектік мәні</u> болып табылады, яғни a саны функцияның анықталу облысына тиісті болса, онда $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
<p>II кезең (топтық жұмыс) жаңа сабақты топтық жұмыс барысында оқушылардың өз бетімен меңгеруіне жағдай жасау: а) оқушылар төмендегі «Білу», «Түсіну», «Талдау», «Жинақтау» тәсілдеріне сәйкес тапсырмаларын өздері толтырады (20 минут); ә) жауаптарын мұғаліммен бірге талдайды (25 минут). Нәтижесі ауызша марапатталады</p>	<p>жаңа сабақты топтық жұмыс барысында оқушылардың өз бетімен меңгеруіне жағдай жасау: а) оқушылар төмендегі «Білу», «Түсіну», «Талдау», «Жинақтау» тәсілдеріне сәйкес тапсырмаларын өздері толтырады (20 минут); ә) жауаптарын мұғаліммен бірге талдайды (25 минут). Нәтижесі ауызша марапатталады</p>
<p>I-қадам (топтық жұмыс) - теория бойынша «Білу» критерийінің индикаторлары: (тақырып мазмұны бойынша кім? не? қандай? қалай? нені? қашан? не істеді сияқты сұрақтарға жауап беретін толық ақпарат іріктеліну керек)</p>	<p>Анықтама: Егер $x = x_0$ нүктесінің аймағында анықталған $y = f(x)$ функциясы үшін $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \quad (1)$ теңдігі орындалса, онда $y = f(x)$ функциясын $x = x_0$ нүктесінде <u>үзіліссіз</u> деп атайды. (1) теңдіктен функция шегінің анықтамасына сүйене отырып, оның $x = x_0$ нүктесіндегі <u>үзіліссіздігі</u> түсінігін былай айтуға болады: Анықтама: Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta > 0$ саны табылып, $x - x_0 < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын әрбір x үшін $f(x) - f(x_0) < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда $y = f(x)$ функциясын $x = x_0$ нүктесінде <u>үзіліссіз</u> болады деп есептейміз.</p>
<p>2-қадам (топтық жұмыс) - теория бойынша «Түсіну» критерийінің индикаторлары: (неге? неліктен? себебі? не үшін? сұрақтары оқушының жоғарыда берген жауаптарына оларды тереңдету үшін қойылады)</p>	<p>Анықтама: егер $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде анықталған және функцияның маңайында анықталған және функцияның шектік мәні x_0 нүктесіндегі мәніне тең болса, онда ол x_0 нүктесінде <u>үзіліссіз</u> функция деп аталады, яғни $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Мұндағы x_0 нүктесі функцияның <u>үзіліссіз нүктесі</u> деп аталады. Егер $x - x_0 = \Delta x$ (аргументтің өсімшесі), $f(x) - f(x_0) = \Delta y$ (функцияның өсімшесі) деп белгілесек, онда бұл анықтаманы келесі түрде жазуға болады: Анықтама: егер $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінің маңайында анықталып $\lim_{x \rightarrow x_0} \Delta y = 0$ болса, онда ол x_0 нүктесінде <u>үзіліссіз</u> деп аталады. Сонымен, егер $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде <u>үзіліссіз</u> болса, онда сол нүктедегі аргументтің шексіз кіші өсімшесіне функцияның шексіз кіші өсімшесі сәйкес болады <u>Үзіліссіз функция</u> анықтамасының үш жағдайына тоқталайық: 1. $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде анықталған; 2. функцияның шектік мәні бар; 3. функцияның шектік мәні оның x_0 нүктесіндегі мәніне тең, яғни $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Егер осы шарттардың біреуі орындалмаса, онда $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде <u>үзіліссіз</u> болмайды. Бұл жағдайда x_0 нүктесі функцияның <u>үзіліс нүктесі</u> деп аталады. Егер $y = f(x)$ функциясы <u>үзіліссіз</u> болса, онда оның графигі тұтас қисық болады. Нүктедегі <u>үзіліссіз функциялардың</u> қасиеті: Егер $f(x)$ және $g(x)$ функциялары x_0 нүктесінде <u>үзіліссіз</u> функциялар болса, онда олардың $f(x) + g(x)$ қосындысы, $f(x) \cdot g(x)$ көбейтіндісі және $\frac{f(x)}{g(x)}, (g(x) \neq 0)$ бөліндісі x_0 нүктесінде <u>үзіліссіз</u> функциялар болады.</p>

<p>3-қадам-(топтық жұмыс) теория бойынша «Талдау» критерийінің индикаторлары: 1.Салыстыр, 2. Айырмашылығы неде? 3. Ұқсастығы неде? 4.Тақырыптың басты идеясын жаз деген тапсырмалар болу керек. Немесе 1-3 тапсырмаларды Венн диаграммасы арқылы қамтуға болады.</p>	<p><u>функцияның</u> $x = x_0$ <u>нүктесіндегі шегі</u> мен <u>үзіліссіздігінің</u> арасында тығыз байланыс бар. Егер $y = f(x)$ <u>функциясы</u> $x = x_0$ <u>нүктесінде</u> <u>үзіліссіз</u> болса, онда <u>функцияның бұл нүктеде шегі</u> бар және ол <u>шек</u> (1) формуламен анықталады. Ал кері тұжырым орындала бермейді.</p> <p>Өйткені, $x = x_0$ <u>нүктесіндегі шектің</u> анықтамасы бойынша <u>функция</u> x_0 <u>нүктесінде</u> анықталмауы да мүмкін, ал <u>функция</u> <u>үзіліссіз</u> болуы үшін ол міндетті түрде x_0 <u>нүктесінде</u> анықталуы қажет.</p>
<p>4-қадам-(топтық жұмыс) теория бойынша «Жинақтау» критерийінің индикаторлары: Қорытынды шығар, анықтама бер, мазмұнды жүйеле, кестені, тірек сызбаны немесе сөзжұмбақты толтыр, немесе өзін құрастыр тағы с.с. басқа түрдегі тапсырмалар оқушының жоғарыдағы «тақырыптың басты идеясына» жазған жауабына қойылады</p>	<p>Анықтама: егер $f(x)$ <u>функциясы</u> X <u>жиынының</u> кез келген <u>нүктесінде</u> <u>үзіліссіз</u> болса, онда оны осы X <u>жиынында</u> (кесіндіде) <u>үзіліссіз функция</u> деп атайды. Кесіндіде <u>үзіліссіз функциялардың</u> қасиеттері:</p> <ol style="list-style-type: none"> егер $y=f(x)$ <u>функциясы</u> $[a; b]$ <u>үзіліссіз</u> және нөлге айналмайтын болса, онда онда осы <u>интервалда тұрақты</u> таңбасын сақтайды; егер $y=f(x)$ <u>функциясы</u> $x \in [a; b]$ <u>кесіндісінде</u> <u>үзіліссіз функция</u> болса, онда: а) осы <u>кесіндіде шектелген функция</u> болады; ә) осы кесіндіде <u>функция</u> өзінің ең үлкен және ең кіші <u>мәндерін</u> қабылдайды, яғни $m \leq f(x) \leq M$, мұндағы m- <u>функцияның</u> ең кіші мәні M-<u>функцияның</u> ең үлкен мәні; егер $y=f(x)$ <u>функциясы</u> $x \in [a; b]$ <u>кесіндісінде</u> <u>үзіліссіз функция</u> болса және <u>кесіндінің</u> шеткі <u>нүктелерінде</u> әр түрлі таңбалы <u>мәндер</u> қабылдаса, онда $[a; b]$ <u>сегментінің</u> ішінде <u>функция</u> ең болмағанда бір <u>нүктеде нөлге</u> айналады.
<p>Оқулықпен жұмыс (5 минут): төмендегі «Қолдану» және оқушының тақырып мазмұнына «Баға беруі» тәсілдеріне сәйкес, яғни рефлексия жасауға, эссе жазуға арналған, практика жүзінде бекіту тапсырмалары орындалады. Нәтижесі ауызша марапатталады.</p>	
<p>5-қадам - (топтық жұмыс) практикада бекіту. Практика жүзінде «Қолдану» критерийіне сәйкес оқулықпен жұмыс жүргізу барысында тек қарапайым тапсырмалармен бекіту жүргізіледі. Дайын формулалар арқылы есептер шығару орындалады</p>	<p>$y = x^2$ <u>функцияның</u> $x = a$ <u>нүктесінде</u> <u>үзіліссіз</u> болатындығын көрсетейік. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ формуласын пайдаланайық, сонда $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} ((a + \Delta x)^2 - a^2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2a + \Delta x) \cdot \Delta x = 0$ Олай болса, <u>функция</u> $x = a$ <u>нүктесінде</u> <u>үзіліссіз</u></p> <p>$y = x^2 + 3$ <u>функциясы</u> үшін:</p> <ul style="list-style-type: none"> егер $x=2,4$ және $x_0 = 2$ болса, онда Δx пен Δy-ті; егер $\Delta x = -0,3$ және $x_0 = 4$ болса, онда x пен Δy-ті табыңдар. <p>$\Delta x = x - x_0 = 2,4 - 2 = 0,4$; $\Delta y = y(x) - y(x_0)$ $\Delta y = y(2,4) - y(2) = 2,4^2 + 3 - 2^2 - 3 = 5,76 - 4 = 1,76$ $x = x_0 + \Delta x = 4 + (-0,3) = 3,7$; $\Delta y = y(3,7) - y(4) = 3,7^2 + 3 - 4^2 - 3 = 13,69 - 16 = -2,31$</p>
<p>6-қадам (топтық жұмыс): «Баға беру» (Сен қалай ойлайсың? Не істер едің? деген тапсырмалар оқушыға жоғарыда алған білімін (теория бойынша) және біліктілігін (практикасы бойынша) өмірдегі жағдаяттарды шешуге бағытталып қойылады</p>	<p>Біржақты үзіліссіздік. Анықтама: егер $y=f(x)$ <u>функциясы</u> кейбір $(a; x_0]$ <u>жарты интервалында</u> анықталып $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0)$ болса, онда ол x_0 <u>нүктесінің сол жағынан</u> <u>үзіліссіз</u> деп аталады. Анықтама: егер $y=f(x)$ <u>функциясы</u> кейбір $[x_0; b)$ <u>жарты интервалында</u> анықталып $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$ болса, онда ол x_0 <u>нүктесінің оң жағынан</u> <u>үзіліссіз</u> деп аталады. $y=f(x)$ <u>функциясы</u> x_0 <u>нүктесінің сол жағынан</u> және <u>оң жағынан</u> <u>үзіліссіз</u>, яғни, $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ болған жағдайда ғана x_0 <u>нүктесінде</u> <u>үзіліссіз</u> болады.</p>

III кезең (кері байланыс – бағалау кезеңі): Жеке жұмыс. Жоғарыда меңгерген мазмұнды үш деңгейге іріктеп (әр деңгейдің білімділік, біліктілік, яғни құзыреттілік деңгейін анықтайтын тапсырмалар) оларды біртіндеп орындату арқылы балл жинау барысында оқушының құзыреттілік деңгейін анықтап, әділ бағалау жүзеге асырылады. Бұл тапсырмаларды оқушылар сабақтың соңына дейін қалған 25 минуттың 22 минутында орындайды + 3 минут қортынды жасалады. **Қалған тапсырмаларлы үйде аяқтап келеді.** Қортынды балл саны дәстүрлі бағаға айналдырылып, келесі сабақтың басында сынып журналына қойылады, мониторингке тіркеледі.

I деңгей (5 балл)	
<p>1-қадам – (жеке жұмыс) теория бойынша «Білу» критерийінің индикаторларына сәйкес (тақырып мазмұны бойынша кім? не? қандай? қалай? нені? қашан? не істеді сияқты сұрақтарға жауап беретін толық ақпараттар іріктелініп II кезеңдегіге қарағанда керісінше қойылады)</p>	<p>Анықтама: Егер $x = x_0$ нүктесінің аймағында анықталған $y = f(x)$ функциясы үшін $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \quad (1)$ теңдігі орындалса, онда $y = f(x)$ функциясын $x = x_0$ нүктесінде үзіліссіз деп атайды. (1) теңдіктен функция шегінің анықтамасына сүйене отырып, оның $x = x_0$ нүктесіндегі үзіліссіздігі түсінігін былай айтуға болады:</p> <p>Анықтама: Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta > 0$ саны табылып, $x - x_0 < \delta$ теңсіздігі қанағаттандыратын әрбір x үшін $f(x) - f(x_0) < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда $y = f(x)$ функциясын $x = x_0$ нүктесінде үзіліссіз болады деп есептейміз.</p>
<p>Практикасы: «ҚОЛДАНУ» (II кезеңдегіге қарапайым тапсырмалар үлгісіндегі тапсырмалар орындалады)</p>	<p>$f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде үзіліссіз болатынын дәлелде.</p> <p>№51 $f(x) = 2 - 3x^2, x_0 = 4$</p> <p>№52 $f(x) = \frac{x-5}{x+1}, x_0 = 1$</p>
1-аралық нәтиже:	
<p>Бірінші деңгейде қалыптасқан құзіреттілік (білім, біліктілік) деңгейінің сапалық өлшемі (бірінші аралық өлшемі): – «дұрыс», «толық» деген білім сапасының түрлерімен сипатталады (Ю.К.Бабанский). Оқушының бұл алғашқы қадам нәтижесінің сандық өлшемі – бес балл = «сынақтан өтті» = «қанағаттандырылдық» білім деңгейінің өлшемі = «3» журналға қойылады, егер келесі деңгей тапсырмаларын меңгере алмаса.</p>	
II деңгей (5 балл + 4 балл = 9 балл)	
<p>1-қадам (жеке жұмыс) - теория бойынша «Түсіну» критерийінің индикаторларына (неге? неліктен? себебі? не үшін?) сәйкес сұрақтар оқушының жоғарыда берген жауаптарына оларды тереңдету үшін қойылады.</p>	<p>Егер $x = x_0$ нүктесінде аргумент өсімісі нөлге ұмтылғанда сәйкес функция өсімісінің шегі нөлге тең болса, онда функция $x = x_0$ нүктесінде үзіліссіз деп аталады. Аргументтің өсімісі – $x - x_0 = \Delta x$, функцияның өсімісі – $f(x) - f(x_0) = \Delta y$.</p>
<p>2-қадам (жеке жұмыс) - теория бойынша «Талдау» критерийінің индикаторларына сәйкес (1.Салыстыр, 2. Айырмашылығы неде? 3. Ұқсастығы неде? 4.Тақырыптың басты идеясын жаз) деген тапсырмалар болу керек. Немесе 1-3 тапсырмаларды Венн диаграммасы арқылы қамтуға болады.</p>	<p>функцияның $x = x_0$ нүктесіндегі шегі мен үзіліссіздігінің арасында тығыз байланыс бар</p> <p>Егер $y = f(x)$ функциясы $x = x_0$ нүктесінде үзіліссіз болса, онда функцияның бұл нүктеде шегі бар және ол шек (1) формуламен анықталады. Ал кері тұжырым орындала бермейді</p> <p>Өйткені, $x = x_0$ нүктесіндегі шектің анықтамасы бойынша функция x_0 нүктесінде анықталмауы да мүмкін, ал функция үзіліссіз болуы үшін ол міндетті түрде x_0 нүктесінде анықталуы қажет.</p>
<p>3-қадам (жеке жұмыс): Практика жүзінде «ҚОЛДАНУ» критерийіне сәйкес (II кезеңдегіге 5-қадам қарапайым тапсырмалар үлгісіндегі тапсырмалардың өзгертілген жағдайдағы нұсқасы орындалады)</p>	<p>Функциялар көрсетілген аралықта үзіліссіз бола ма?</p> <p>№53 $f(x) = \frac{x}{x^2+1}, (-\infty; \infty)$</p> <p>№54 $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2}, [3; \infty)$</p>

2-аралық нәтиже:

Бірінші деңгейде қалыптасқан күзiреттiлiк (бiлiм, бiлiктiлiк) деңгейiнiң сапалық өлшемі (бiрiншi аралық өлшемі): – «дұрыс», «толық» деген бiлiм сапасының түрлерiмен сипатталады (Ю.К.Бабанский). Оқушының бұл алғашқы қадам нәтижесiнiң сандық өлшемі – бес балл = «сынақтан өттi» = «қанағаттандырарлық» бiлiм деңгейiнiң өлшемі = «3» журналға қойылады, егер келесi деңгей тапсырмаларын меңгере алмаса.

III деңгей (9 балл + 3 балл = 12 балл)	
<p>1-қадам (жеке жұмыс) - теория бойынша «Жинақтау» критерийiнiң қорытынды шығаруға бағытталған индикаторлары: Қорытынды шығар, анықтама бер, мазмұнды жүйеле, кестенi, тiрек сызбаны, сөзжұмбақты толтыр немесе өзiң құрастыр тағы с.с. басқа түрдегi тапсырмалар оқушының жоғарыдағы «тақырыптың басты идеясына» жазған жауабына қойылады.</p> <p>II-кезең, 4-қадамда «жинақтауға» берiлген тапсырма басқа формада берiлiп, баланың бiлiм деңгейi бағаланады.</p>	<p>Анықтама: егер $f(x)$ функциясы X жиынының кез келген нүктесiнде үзiлiссiз болса, онда оны осы X жиынында (кесiндiде) <u>үзiлiссiз функция</u> деп атайды. Кесiндiде <u>үзiлiссiз функциялардың қасиеттерi:</u></p> <ol style="list-style-type: none"> егер $y=f(x)$ функциясы $[a; b]$ үзiлiссiз және нөлге айналмайтын болса, онда онда осы интервалда тұрақты таңбасын сақтайды; егер $y=f(x)$ функциясы $x \in [a; b]$ кесiндiсiнде үзiлiссiз функция болса, онда: а) осы кесiндiде шектелген функция болады; ә) осы кесiндiде функция өзiнiң ең үлкен және ең кiшi мәндерiн қабылдайды, яғни $m \leq f(x) \leq M$, мұндағы m- функцияның ең кiшi мәні M-функцияның ең үлкен мәні; егер $y=f(x)$ функциясы $x \in [a; b]$ кесiндiсiнде үзiлiссiз функция болса және кесiндiнiң шеткi нүктелерiнде әр түрлi таңбалы мәндер қабылдаса, онда $[a; b]$ сегментiнiң iшiнде функция ең болмағанда бiр нүктеде нөлге айналады. <p>$y = f(x)$ функциясы үшiн $x = x_0$ нүктесiнде $x = x_0$ нүктесiнде үзiлiссiздiк шарты орындалмаса, онда x_0 нүктесiн функцияның <u>үзiлiс нүктесi</u> деп атайды.</p>
<p>2-қадам (жеке жұмыс): «Баға беру» (Сен қалай ойлайсың? Не iстер едiң? деген тапсырмалар оқушыға жоғарыда алған бiлiмiн (теория бойынша) және бiлiктiлiгiн (практикасы бойынша) өмiрдегi жағдаяттарды шешуге қолдана алу дәрежесi бағаланады.</p>	<p>№ 55 $y = x^3 - 5$ функциясы үшiн:</p> <ul style="list-style-type: none"> егер $x=3,2$ және $x_0 = 3$ болса, онда Δx пен Δy-тi; егер $\Delta x = -0,1$ және $x_0 = 2$ болса, онда x пен Δy-тi табыңдар.
3-нәтиже:	
<p>Үшiншi деңгейдiң нәтижесi (түбегейлi көзделген нәтиже): алғашқы екi деңгейде жинаған 9 баллға + 3 балл =12 балл = «5» журналға қойылады. Оқушының бiлiм сапасы бiлiм стандарты көлемiнде «дұрыс», «толық», «әрекеттiлiк» пен «тереңдiлiк»-ке «жүйелiлiк» пен «саналылық» қосылып, барлығының жиынтығы «берiк» бiлiм болып саналады (Ю.К. Бабанский).</p>	